Pismeni ispit iz Euklidske geometrije II, 14.06.2013. (ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte)

1. (40%)(a) Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presječna tačka prave određena tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravan α.

Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu: Ako je prava n normalna na dvije date prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$.

(60%)(b) Ako su P i Q redom, tačke mimoilaznih pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava $p(P,Q)$ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.

Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu: Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i okomita je na njih.

2. (40%)(a) Na pravoj određenoj ivicom AB pravougaonika $\square ABCD$ konstruisati tačku E takvu da su uglovi $\measuredangle AED$ i $\measuredangle DEC$ podudarni.

(60%)(b) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu težišne duži podudarne trima datim dužima.

3. (20%)(a) Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

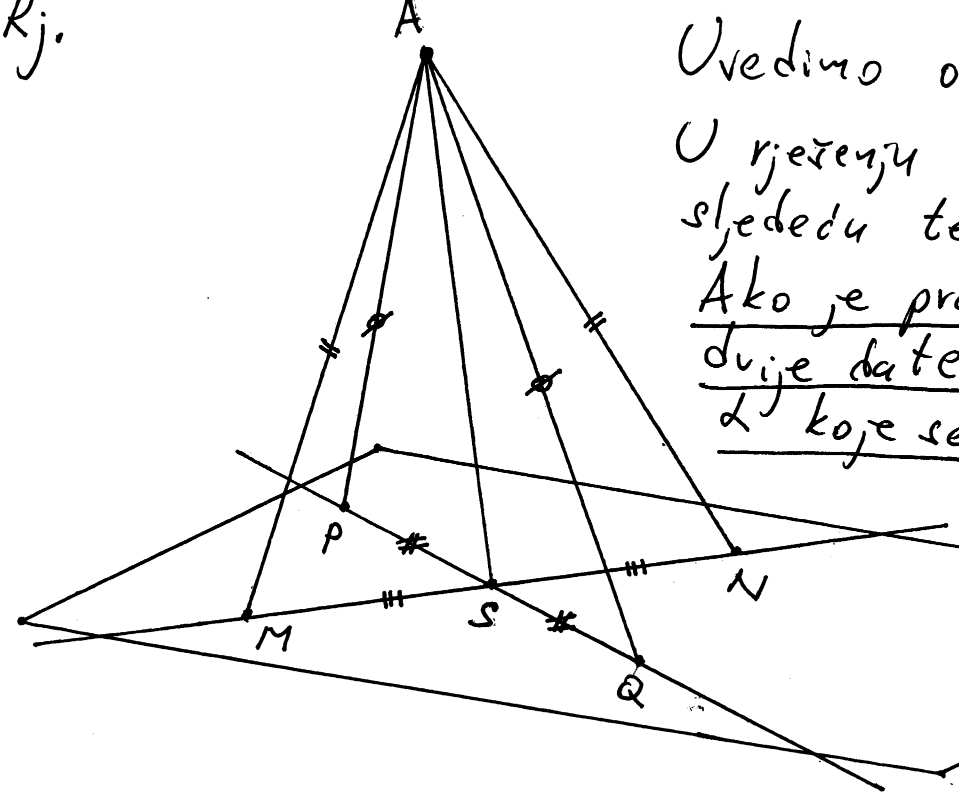
(20%)(a) Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao i neka su tačke D, E i F takve da su trouglovi $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle CFA$ pravilni (jednakostranični) i pri tome su tačke D i C sa raznih strana prave $p(A,B)$, tačke A i E su sa raznih strana prave $p(B,C)$, tačke B i F su sa raznih strana prave $p(A,C)$. Dokazati da su duži AE, BF i CD međusobno podudarne.

(60%)(b) Dat je krug $k_1(S_1,r_1)$, prava t i tačka $T \in t$. Konstruisati krug $k(S,r)$ koji dodiruje krug k i koji dodiruje pravu t u tački T. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presječna tačka prave određene tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravan α.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

U rješenju ćemo iskoristiti sljedeću teoremu:

Ako je prava n normalna na dvije date prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$. ...(*)

Posmatrajmo trouglove $\triangle AMS$ i $\triangle ANS$.

$$\left.\begin{array}{l} AM \cong AN \\ MS \cong NS \\ AS \cong AS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle AMS \cong \triangle ANS$$

$$\Downarrow$$

$\measuredangle ASM \cong \measuredangle ASN$ a kako su ovo dva naporedna ugla to je $AS \perp p(M,N)$ ...(1)

Posmatrajmo sad trouglove $\triangle APS$ i $\triangle AQS$.

$$\left.\begin{array}{l} AP \cong AQ \\ PS \cong QS \\ AS \cong AS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle APS \cong \triangle AQS$$

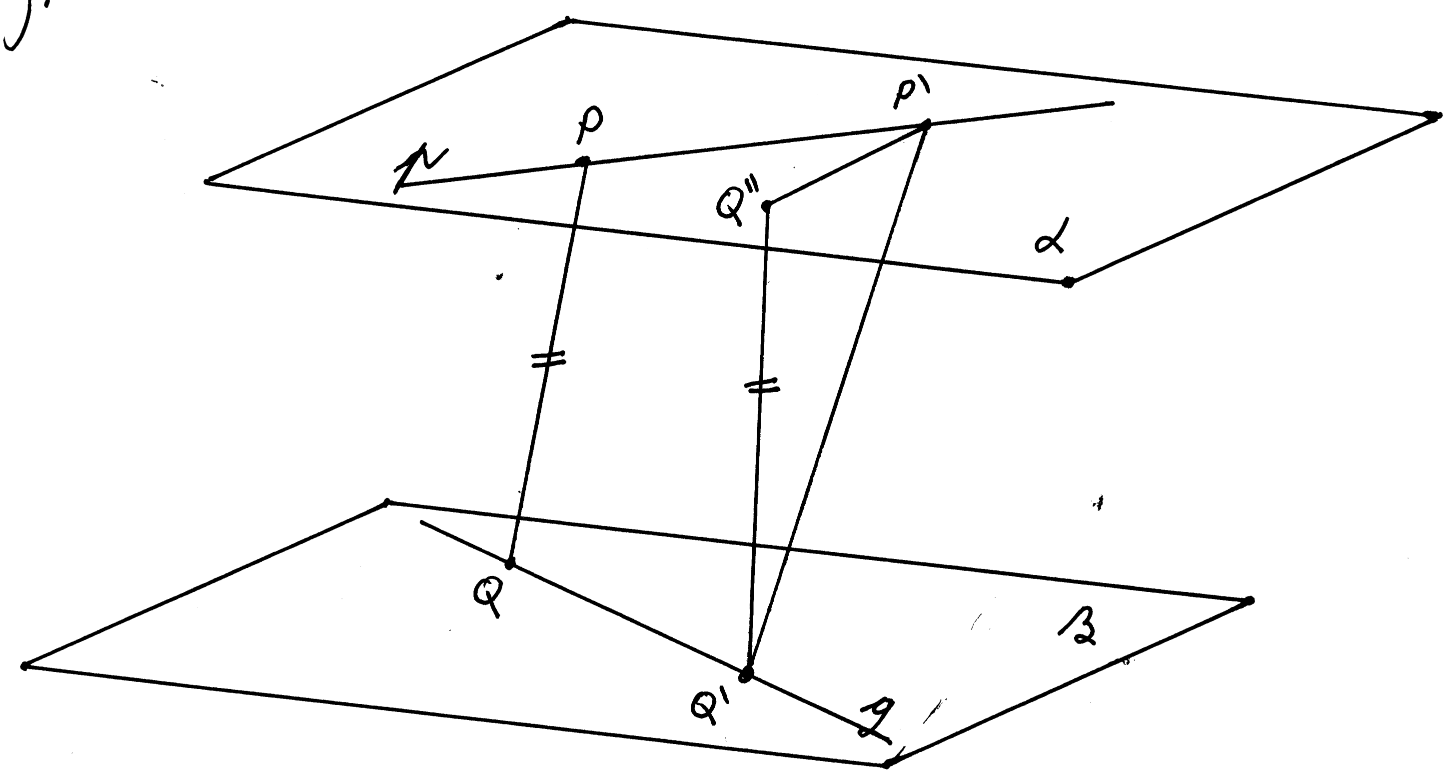
$$\Downarrow$$

$\measuredangle ASP \cong \measuredangle ASQ$ a kako su ovo dva naporedna ugla to je $AS \perp p(P,Q)$ ...(2)

Prema (*), (1) i (2) $\Rightarrow AS \perp \alpha$ q.e.d.

(#) Ako su P i Q redom tačke mimoilaznih pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava $p(P,Q)$ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Neka je α ravan koja je normalna na pravu $p(P,Q)$ i sadrži pravu p, a β ravan koja je normalna na pravoj $p(P,Q)$ i sadrži pravu q.

Neka su P' i Q' proizvoljne tačke redom pravih p i q. Trebamo pokazati da za slučaje kada je

a) $P \neq P'$, $Q = Q'$

b) $P = P'$, $Q \neq Q'$

c) $P \neq P'$, $Q \neq Q'$

uvijek imamo (uvijek vrijedi) da je $PQ < P'Q'$,

a) $P \neq P'$, $Q = Q'$

Trougao $\Delta PQP'$ je pravougli (sa pravim uglom kod tjemena P) pa je njegova hipotenuza (duž $P'Q$) duža od katete (duž PQ) tj. $PQ < P'Q'$

b) $P = P'$, $Q \neq Q'$

Trougao $\Delta PQQ'$ je pravougli (sa pravim uglom kod vrha Q) pa je njegova hipotenuza duža od katete tj. $PQ < PQ'$ (tj. $PQ < P'Q'$).

c) $P \neq P'$, $Q \neq Q'$

Neka je Q'' podnožje normale iz tačke Q' na ravan α.

$Q'Q'' \perp \alpha$ i $\alpha \parallel \beta \Rightarrow Q'Q'' \perp \beta \Rightarrow Q'Q'' \perp q$

$p \subseteq \alpha$ i $Q'Q'' \perp \alpha \Rightarrow Q'Q'' \perp p$

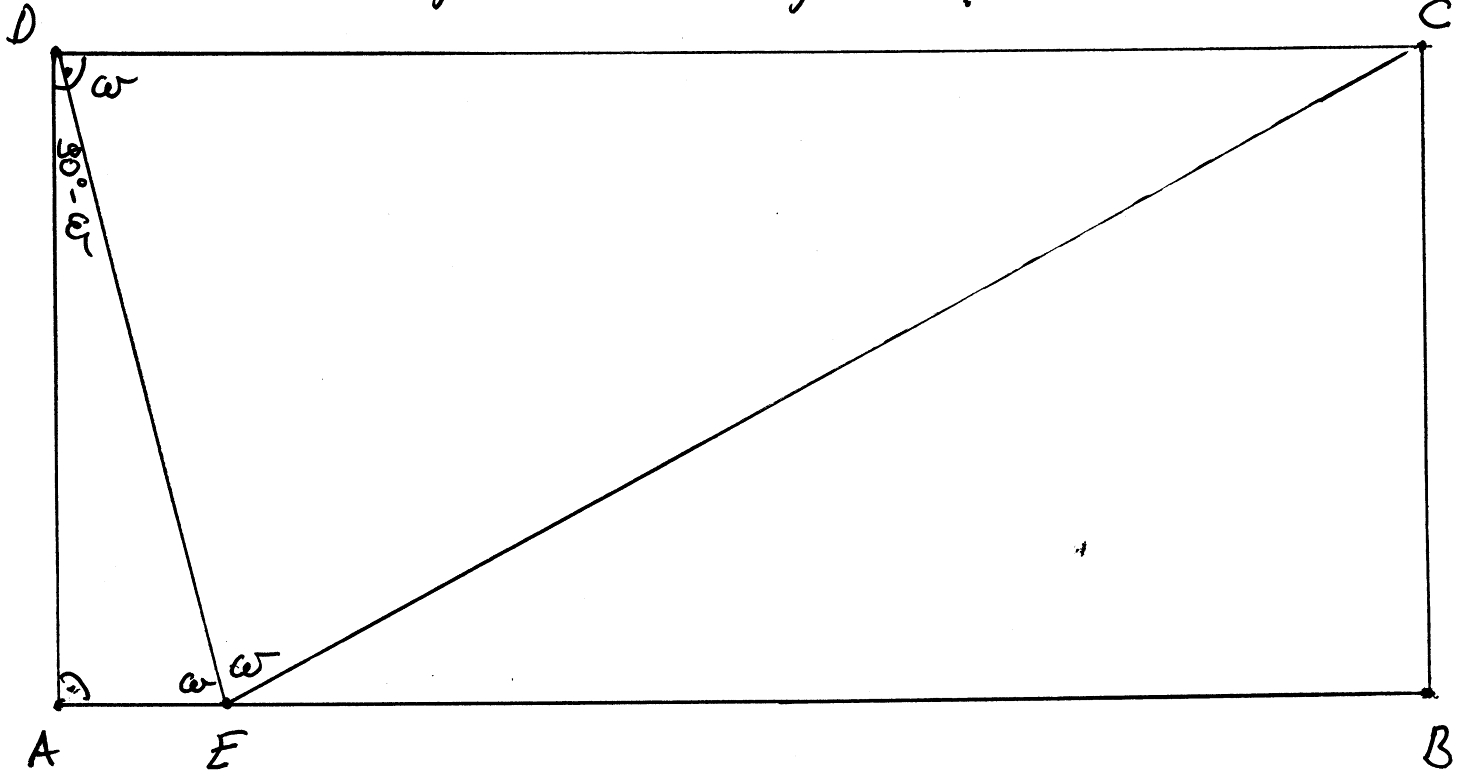
Tačke P' i Q'' su različite (u suprotnom prava $Q'Q''$ siječe mimoilazne prave p i q i na njima je normalna, što je u kontradikciji sa teoremom: Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i okomita je na njih. (jer prava $n(P,Q)$ siječe mimoilazne prave p i q i na njima je normalna i takva prava je na osnovu navedene teoreme jedinstvena). Prema tome P' i Q'' su različite i $Q'Q'' \perp Q''P' \Rightarrow \Delta P'Q'Q''$ pravougli $\Rightarrow Q'P' > Q'Q''$ a kako je $PQ \cong Q'Q'' \Rightarrow PQ < P'Q'$

(#) Na pravoj određenoj ivicom AB pravougaonika $\square ABCD$ konstruisati tačku E takvu da su uglovi $\measuredangle AED$ i $\measuredangle DEC$ podudarni.

Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je E tačka na pravoj $p(A,B)$ pravougaonika $\square ABCD$ takva da $\measuredangle AED \cong \measuredangle DEC = \omega$.

Posmatrajmo $\triangle AED$. Kako je $\measuredangle DAE = 90° \Rightarrow$

$$\Rightarrow \measuredangle ADE = 90° - \omega \overset{\measuredangle ADC = 90°}{\Longrightarrow} \measuredangle CDE = \omega$$

$$\Rightarrow \triangle CDE \text{ jkk } (CD \cong CE).$$

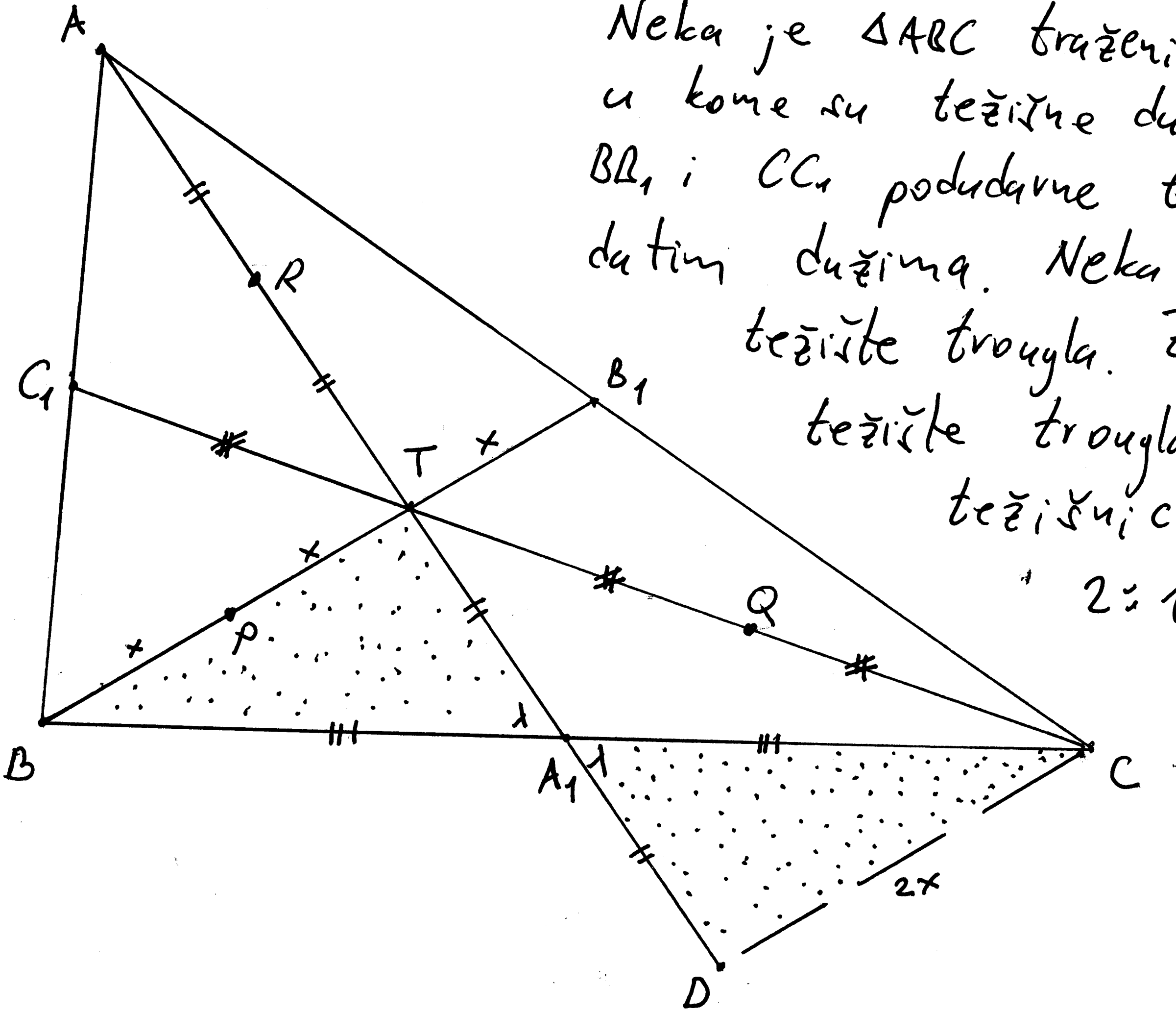
Kako nam je dat pravougaonik $\square ABCD$ to tačku E sad nije teško konstruisati.

Konstruisati trougao ΔABC takav da su mu težišne duži podudarne trima datim dužima.

R:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je ΔABC traženi trougao u kome su težišne duži AA_1, BB_1 i CC_1 podudarne trima datim dužima. Neka je T težište trougla. Znamo da težište trougla dijeli težišnicu u omjeru $2:1$.

Označimo sa P, Q i R redom sredine duži BT, CT, AT. Tada

$BP \cong PT \cong TB_1$, $CQ \cong QT \cong TC_1$ i $AR \cong RT \cong TA_1$.

Neka je D tačka na $p[A, A_1)$ t.d. $A - A_1 - D$ i $TA_1 \cong A_1D$

$$\left.\begin{array}{l} BA_1 \cong A_1C \\ \measuredangle BA_1T \cong \measuredangle CA_1D = \lambda \\ TA_1 \cong A_1D \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta BA_1T \cong \Delta CA_1D$$

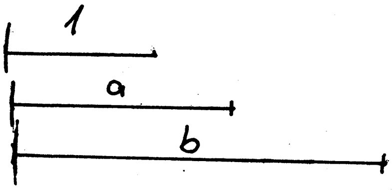
$$\Downarrow$$

$$BT \cong CD$$

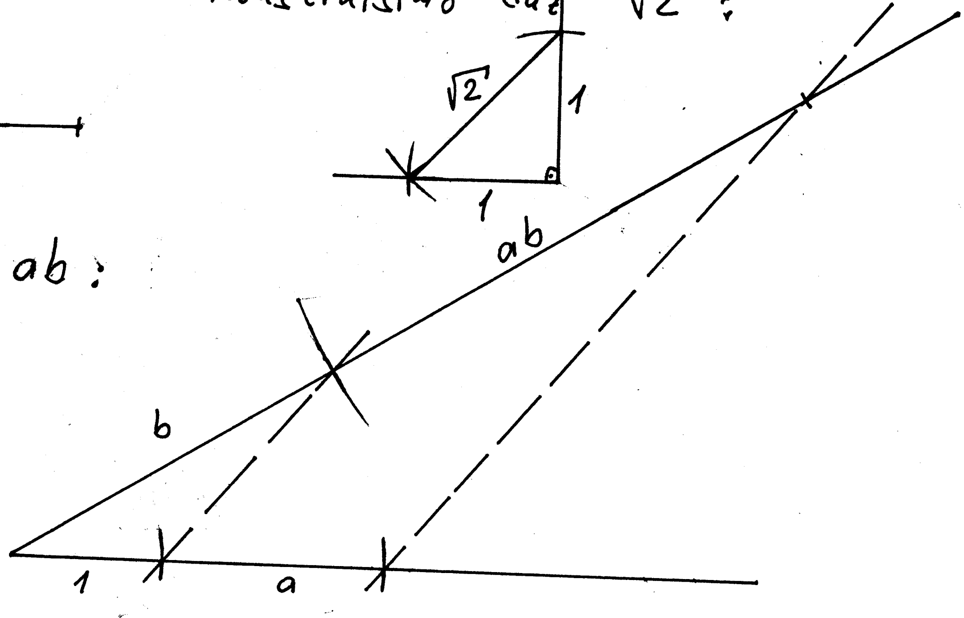
Kako su nam poznate dužine težnih linija time su nam poznate i dužine za CT, TD i CD pa ΔDCT možemo konstruisati, a time i ΔABC.

(#) Nacrtati duž $x = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

Rj. Neka su date duži a, b i neka je data jedinična duž.



Konstruišimo duž $\sqrt{2}$:



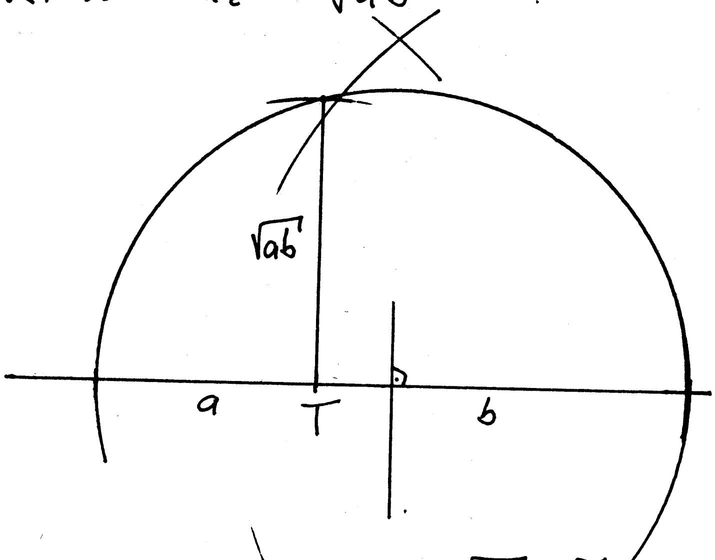
Konstruišimo duž ab:

$x_1 = ab \quad /:b$

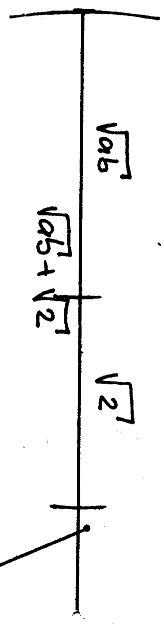
$\frac{x_1}{b} = \frac{a}{1}$

$\frac{1}{a} = \frac{b}{x_1}$

Konstruišimo duž $\sqrt{ab}$.



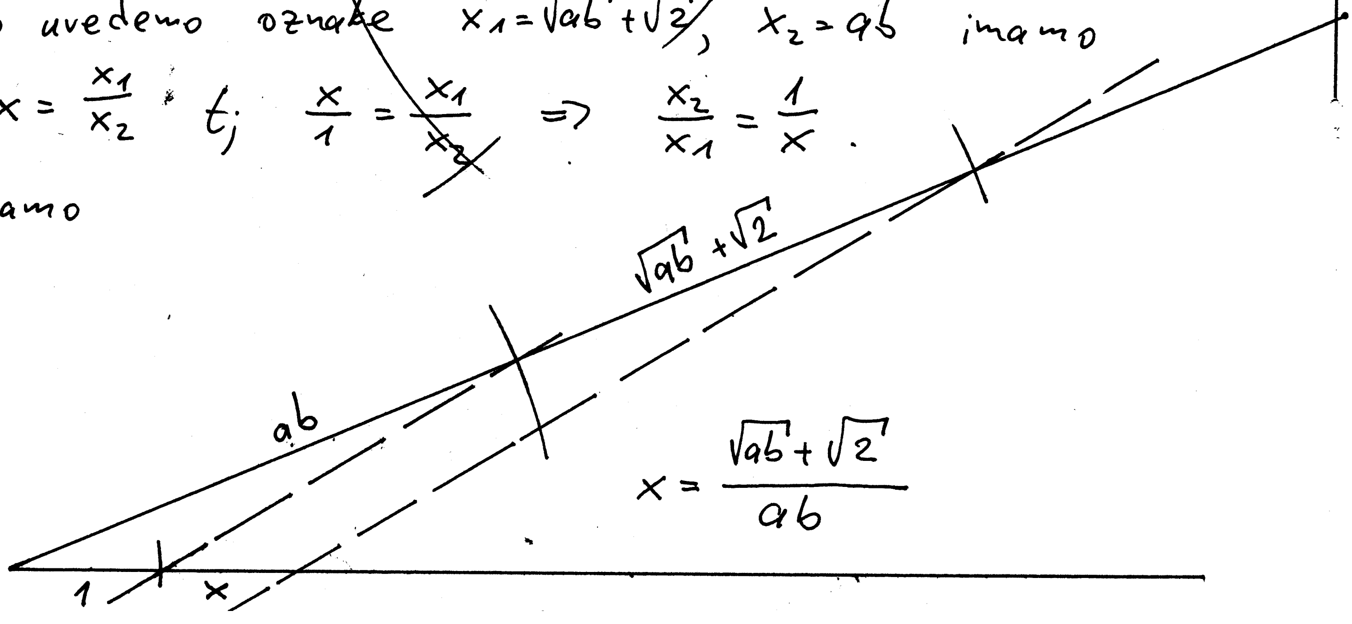
Konstruišimo duž $\sqrt{ab} + \sqrt{2}$:



Ako uvedemo oznake $x_1 = \sqrt{ab} + \sqrt{2}$, $x_2 = ab$ imamo

$x = \frac{x_1}{x_2}$ tj. $\frac{x}{1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{x}$.

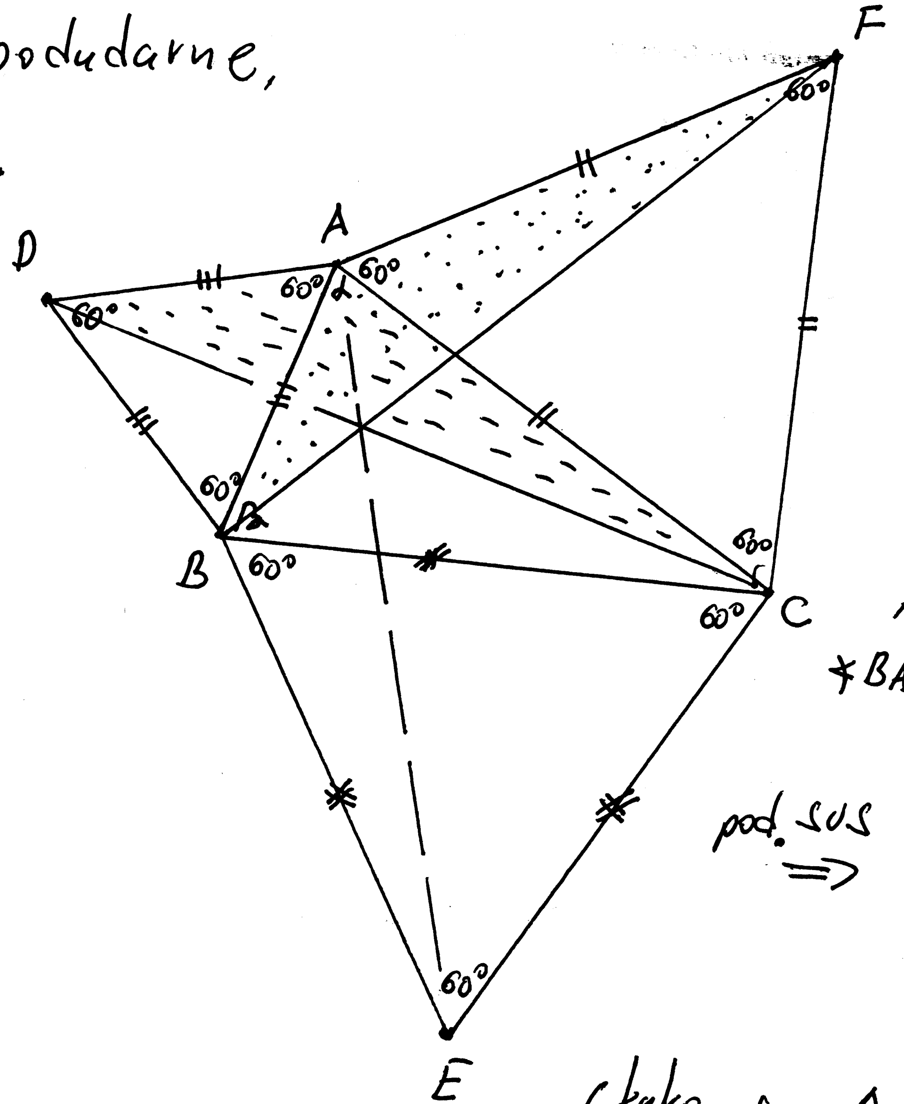
Imamo



$x = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$

(#) Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao i neka su tačke D, E i F takve da su trouglovi $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle CFA$ pravilni (jednakostranični) i pri tome su tačke D i C sa raznih strana prave $p(A,B)$, tačke A i E su sa raznih strana prave BC, tačke B i F su sa raznih strana prave $p(A,C)$. Dokazati da su duži AE, BF i CD međusobno podudarne.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Posmatrajmo $\triangle ABF$ i $\triangle ADC$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong AD \\ AF \cong AC \\ \measuredangle BAF \cong \measuredangle CAD = \alpha + 60^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS}$$

$$\xRightarrow{\text{pod. SUS}} \triangle ABF \cong \triangle ADC$$

$$\Downarrow$$

$$BF \cong CD$$

(kako su $\triangle ADB$, $\triangle AFC$, $\triangle BEC$ jks svi uglovi unutar njih su po 60°)

Slično se pokaže da je $\triangle ABE \cong \triangle CBD$

$$\Downarrow$$

$$CD \cong AE$$

Prema tome $AE \cong BF \cong CD$ q.e.d.

(#) Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

R: <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(S,r)$ tražena kružnica koja dodiruje datu pravu t u datoj tački T i koja dodiruje datu kružnicu $k_1(S_1,r_1)$ u tački P. Primetimo da je $p(S,T) \perp t$ i da je $S-P-S_1$ (zato što je P dodirna tačka kružnica k i k_1). Neka je n prava koja prolazi kroz S_1 i $n \perp t$. Označimo sa $\{R\} = n \cap t$ i $\{M,N\} = n \cap k_1$ tako da je $R-M-N$.

Pokažimo da duž SS_1 siječe duž TN u tački P.

Posmatrajmo trouglove ΔPNS_1 i ΔPTS.

$p(S,T) \parallel n$ i $p(S,S_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle TSP \cong \measuredangle NS_1P = \varepsilon$

ΔSPT jkk $\Rightarrow \measuredangle STP \cong \measuredangle SPT = \omega$ i $\measuredangle S_1NP \cong \measuredangle NPS_1 = \omega$

$p(S,S_1)$, $P \in SS_1$, $\measuredangle SPT = \measuredangle S_1PN = \omega \Rightarrow$ uglovi $\measuredangle SPT$ i $\measuredangle NPS_1$ su unakrsni uglovi $\Rightarrow NT \cap SS_1 = \{P\}$.

Kako pravu n možemo konstruisati to možemo konstruisati i tačku P a time i tačku S ($\{S\}$ = simetrala duži $PT \cap p(S,T)$)

Sad možemo konstruisati traženu kružnicu $k(S,ST)$.